Herhalingstentamen Variatierekening en Optimale Besturingsth. 2013-14

Datum	:	24-02-2014
Plaats	:	Aletta Jacobshal
Tijd	:	18.30 – 21.30

Het tentamen is open boek; u kunt al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. Beschouw het niet-lineaire systeem (met $\alpha \in \mathbb{R}$ een parameter)

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}x_1(t) &= x_2(t) \\ \tfrac{d}{dt}x_2(t) &= -x_1(t) - (\alpha + x_1(t)^2)x_2(t) \end{aligned}$$

   (a) Bepaal de evenwichtspunten van dit systeem.

   (b) Lineariseer het systeem rond $(0,0)$.

   (c) Onderzoek met behulp van de linearisatie de asymptotische stabiliteit van $(0,0)$ voor $\alpha > 0$ en ook voor $\alpha < 0$.

   (d) Wat kan men op basis van de linearisatie concluderen over de asymptotische stabiliteit voor $\alpha = 0$?

   (e) Bewijs dat voor $\alpha = 0$ de oorsprong asymptotisch stabiel is. (Hint: construeer een Lyapunovfunctie.)

2. Beschouw het scalaire systeem en kostencriterium

$$\frac{d}{dt}x = u \qquad J(x_0, u) := \frac{1}{2}\left[g x(t_1)^2 + \int_0^{t_1} x(t)^2 + u(t)^2 dt \right]$$

   Hierbij is $g \in \mathbb{R}$ niet-negatief en $t_1 = \ln 2$.

   (a) Bepaal de Hamiltoniaan en de optimale besturing als functie van de co-toestand.

   (b) Leidt de differentiaalvergelijkingen voor de toestand en de co-toestand af en laat zien dat de algemene oplossing gegeven wordt door

$$x(t) = ae^t + be^{-t} \qquad p(t) = -ae^t + be^{-t}$$

   met a, b nader te bepalen constanten.

   (c) Bepaal a en b als functie van g zodanig dat $x(0) = 2$ en zodanig dat p aan de eindvoorwaarde voldoet.

   (d) Bepaal de limieten van a en b voor het geval g naar oneindig gaat.

   (e) Geef de limietoplossing $x(t)$ voor $g = \infty$. Bepaal voor dit geval $x(t_1)$. Kunt u dit intuïtief verklaren?

3. Beschouw het systeem met kostencriterium

$$\frac{d}{dt}x = u \qquad J(x_0, u, t_\mathrm{e}) = x(t_\mathrm{e})^2 + t_\mathrm{e} + \int_0^{t_\mathrm{e}} u(\tau)^2 d\tau$$

   De bedoeling is om de kosten te minimaliseren over zowel u als t_e.

(a) Zij eerst t_e vast. Bepaal met behulp van dynamisch programmeren de optimale besturing, het resulterende toestandstraject en de optimale kosten als functie van x_0 en t_e.

(b) Bepaal met behulp van het Minimum principe de optimale besturing, het resulterende toestandstraject en de optimale kosten als functie van x_0 en t_e. Denk eraan dat de gebruikelijke factor $\frac{1}{2}$ in het kostencriterium ontbreekt.

(c) Gegeven is dat $x_0 \geq 1$. Wat is de optimale eindtijd t_e als het kosten criterium ook naar t_e geminimaliseerd wordt?

4. Veel fysische systemen zijn van de vorm

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \qquad x(0) = x_0, \text{ met } A = -A^T,$$

(a) Bewijs dat dit systeem stabiel is. (Hint: Beschouw $V(x) = \|x\|^2 = x^T x$.)

(b) Bewijs dat het systeem niet asymptotisch stabiel is.

(c) Gezien het antwoord van (b) is het logisch om het systeem asymptotisch stabiel te maken. Hiertoe beschouwen we

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \qquad x(0) = x_0, \qquad A = -A^T \\ y(t) &= b^T x(t). \end{aligned}$$

Bewijs dat als (A, b) regelbaar is, dan maakt de uitgangsterugkoppeling $u(t) = -y(t)$ het systeem asymptotisch stabiel.

(d) Bewijs dat de bovenstaande terugkoppeling ook de optimale terugkoppeling is voor de kostenfunctionaal

$$J(u(\cdot)) = \int_0^\infty [y^2(t) + u^2(t)]dt.$$

Puntenverdeling: Gratis 10

1. a: 4, b: 4, c: 4, d: 4, e: 4.
2. a: 5, b: 5, c: 5, d: 5, e: 5.
3. a: 10, b: 10, c: 5.
4. a: 5, b: 5, c: 5, d: 5.